

Insiemi convessi e triangoli in $\mathbb{C}$

(i) Un insieme non vuoto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si dice **convesso** se

$$\forall z_1, z_2 \in \Omega \implies [z_1, z_2] \subseteq \Omega, \quad (1)$$

dove $[z_1, z_2]$ denota il “segmento di estremi z_1 e z_2 ” definito come

$$[z_1, z_2] := \{z = z_1 + t(z_2 - z_1) \mid t \in [0, 1]\}. \quad (2)$$

(ii) Se $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$, si chiama l'**inviluppo convesso** di A , $\text{inv}(A)$ il più piccolo insieme convesso che contiene A .

(iii) Dati tre punti z_1, z_2, z_3 il **triangolo di vertici** z_j , $T(z_1, z_2, z_3)$, è l'inviluppo convesso dell'insieme $\{z_1, z_2, z_3\}$. Il triangolo $T(z_1, z_2, z_3)$ si dice **non-degenere** se i vertici non sono allineati (ossia non esiste alcuna retta¹ r tale che $z_j \in r, \forall j$).

Esercizi

Esercizio 1 Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$. Dimostrare che

$$\text{inv}(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B, \quad (3)$$

dove $\mathcal{F}$ denota la famiglia di tutti gli insiemi convessi che contengono A .

Esercizio 2 Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$. Dimostrare che

$$\text{inv}(A) = \{s_1 z_1 + \dots + s_n z_n \mid n \in \mathbb{N}, z_j \in A, s_j \geq 0 \text{ con } s_1 + \dots + s_n = 1\}. \quad (4)$$

Esercizio 3 Dimostrare che

$$T(z_1, z_2, z_3) = \{s_1 z_1 + s_2 z_2 + s_3 z_3 \mid s_j \geq 0 \text{ con } s_1 + s_2 + s_3 = 1\}. \quad (5)$$

Esercizio 4 Dimostrare che

$$T(z_1, z_2, z_3) = \varphi(T_0), \quad (6)$$

dove

$$T_0 := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s, t \geq 0 \text{ e } s + t \leq 1\}, \quad \varphi(s, t) := z_3 + s(z_1 - z_3) + t(z_2 - z_3). \quad (7)$$

Esercizio 5 Dimostrare che $T(z_1, z_2, z_3)$ è compatto (per ogni z_1, z_2, z_3).

Esercizio 6 (i) Sia $T(z_1, z_2, z_3)$. Dimostrare che $z \in T$ se e solo se esiste $z'_3 \in [z_1, z_2]$ tale che $z \in [z'_3, z_3]$ (e analogamente scambiando ciclicamente i vertici).

(ii) Dimostrare che se $T = T(z_1, z_2, z_3)$ è degenere, allora $\mathring{T} = \emptyset$ e che se T è non degenere, allora

$$\mathring{T} = \{z = s_1 + s_2 z_2 + s_3 z_3 : s_i > 0 \text{ e } s_1 + s_2 + s_3 = 1\}. \quad (8)$$

(iii) Dimostrare che $\mathring{T}$ è convesso.

¹Una retta r è un insieme della forma $r = \{z_0 + t(z_1 - z_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ con $z_1 \neq z_0$.

Esercizio 7 Dimostrare che

$$\partial T(z_1, z_2, z_3) = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1]. \quad (9)$$

Esercizio 8 (*Teorema di Jordan per triangoli*) Dimostrare che se $T = T(z_1, z_2, z_3)$ è un triangolo non degenere, allora²

$$\mathbb{C} = \mathring{T} \sqcup \partial T \sqcup T^c$$

con $\mathring{T}$ e T^c aperti connessi di cui ∂T è la frontiera comune; T^c è illimitata (e verrà chiamata **esterno di T**).

Esercizio 9 Siano $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ e sia $T = T(z_1, z_2, z_3)$. Dimostrare che

$$\text{diam}(T) := \sup\{|z - w| : z, w \in T\} = \delta, \quad \text{dove} \quad \delta := \max\{|z_1 - z_2|, |z_2 - z_3|, |z_3 - z_1|\}. \quad (10)$$

Suggerimenti per l'Es 9: (i) se T è degenere è facile (dopo una traslazione ed una rotazione e ad un eventuale scambio di nomi, ci si riduce al caso in cui z_j stanno sull'asse reale e $z_1 \leq z_2 \leq z_3$). Possiamo dunque assumere che T sia non degenere.

(ii) Dimostrare che $\sup\{|z - w| : z, w \in T\} = \max\{|z - w| : z, w \in T\}$, ossia che esistono $u, w \in T$ tale che $\delta = |u - w|$ (si usino gli Es 4, 5 e il teorema di Weierstrass).

(iii) Dimostrare che, se u e w sono come sopra allora $w \in \partial T$ (e quindi anche $u \in \partial T$).

(iv) Dimostrare che se u e w sono come al punto precedente con $u, w \in \partial T$, allora w deve coincidere con uno dei vertici (e quindi anche u deve coincidere con uno dei vertici).

² $\sqcup$ denota unione disgiunta.